ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI BIAŁOSTOCKIEJ
Nr 55 Nauki Techniczne - Inżynieria Środowiska Nr 4 1988

Jerzy Bogdan Żembrowski, Władysław Król

NUMERYCZNE ROZWIĄZANIE RÓWNANIA BILANSU CIEPLNEGO ODCINKA INSTALACJI CIEPŁEJ WODY UŻYTKOWEJ

Wymianę ciepła w pojedynczym odcinku instalacji ciepłej wody użytkowej opisuje układ równań bilansowych. Nieliniowość oraz uwikłana postać tych równań wymagają zastosowania numerycznych metod ich rozwiązania. Przedstawiono sposoby obliczeń metodą iteracji oraz metodą Newtona. Uzyskano rozwiązania, umożliwiające dokonywanie analizy przepływów cyrkulacyjnych z uwzględnieniem dowolnie wybranych parametrów fizycznych ciał, biorących udział w wymianie ciepła.

Wymianę ciepła w pojedynczym odcinku instalacji c.w.u. opisuje w warunkach ustalonych następujące równanie bilansowe *):

$$\dot{Q}_{str(1)} = \dot{Q}_{str(2)} = \dot{Q}_{str(3)} = \dot{Q}_{str(4)} \ [kW], \qquad (1)$$

Równanie powyższe można zamienić na równoważny układ równań:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{str(4)} - \dot{Q}_{str(1)} &= 0, \\ \dot{Q}_{str(4)} - \dot{Q}_{str(2)} &= 0, \\ \dot{Q}_{str(4)} - \dot{Q}_{str(3)} &= 0. \end{aligned} \qquad (2)$$

*) Opis przedstawionego równania bilansowego oraz symbole oznaczeń podano w artykule "Problem przepływów cyrkulacyjnych w instalacji ciepłej wody użytkowej zasilanej z węzła cieplnego", p. s. 237.

Po określeniu parametrów jednej ze zmiennych, tj. t_K (ze względu na specyfikę procesu wymiany ciepła), równania układu (2) zawierają trzy wielkości niewiadome: ϑ_o, ϑ_w, G. Rozwiązanie tego układu równań poprzez przekształcenia algebraiczne jest niemożliwe na skutek nieliniowej zależności względem niewiadomych oraz uwikłanej postaci. Znaczne uwikłanie zapisu jest spowodowane zdyskretyzowaniem zapisu parametrów fizycznych wody i powietrza (gęstość, ciepło właściwe, lepkość kinematyczna, rozszerzalność objętościowa, liczba Prandtla) względem temperatury oraz wyróżnika burzliwości względem liczby Reynoldsa.

W celu uzyskania jawnej postaci przedstawionych parametrów, wykorzystując twierdzenie Weierstrassa, podane w sposób dyskretny funkcje aproksymowano wielomianem stopnia siódmego [5,7], tj.

$$y(t) = b(a_1t^7 + a_2t^6 + a_3t^5 + a_4t^4 + a_5t^3 + a_6t^2 + a_7t + a_8), \tag{3}$$

gdzie:

$y(t)$ - aproksymowana funkcja,

$b, a_1 - a_8$ - współczynniki wielomianu,

t - zmienna.

Aproksymacji dokonano metodą najmniejszych kwadratów, a jako miary jakości dopasowania użyto odchylenia standardowego oraz współczynnika korelacji. Obliczeń dokonano z zastosowaniem EMC, wykorzystując program PTE-13 *). Aproksymowano w zakresie temperatury wody 0 - 160°C, temperatury powietrza -30 - 50°C oraz liczby Reynoldsa 2200 - 10^4.

W celu uzyskania jednorodnej postaci równań układu (2) wprowadzono następujące wielkości pomocnicze:

$$A = (t_p - t_k)c_{pw}(t_w)10^3 , \tag{4}$$

$$B = 2\pi L\left(\frac{1}{\lambda_m} \ln \frac{d_w}{d_w - 2m_s} + \frac{1}{\lambda_R} \ln \frac{d_z}{d_w} + \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{d_z + 2g_i}{d_z} + \right.$$

*) Autorem programu PTE-13 jest W. Król. Wartości liczbowe współczynników wielomianu oraz wskaźników jakości dopasowania są w posiadaniu autorów.

$$+ \frac{1}{\lambda_p} \ln \frac{d_z + 2g_i + 2g_p}{d_z + 2g_i})^{-1} , \tag{5}$$

$$C = R_2 R_6 R_7 \left[Pr_o(t_o)\right]^{b+0,25} (R_3 R_4)^b , \tag{6}$$

$$D = R_5 R_8 R_1^a \left[Pr_w(t_w)\right]^{0,68} R_9^c , \tag{7}$$

gdzie:

$$R_1 = \frac{4}{\pi (d_w - 2m_s)\, \rho_w(t_w)\, \nu_w(t_w)} , \tag{8}$$

$$R_4 = \frac{9,81}{(273,15 + t_o)\, \left[\nu_o(t_o)\right]^2} , \tag{9}$$

$$R_6 = \frac{\lambda_o(t_o)}{d_z + 2g_i + 2g_p} , \tag{10}$$

$$R_7 = \pi L (d_z + 2g_i + 2g_p), \tag{11}$$

$$R_8 = \pi L\, \lambda_w(t_w) , \tag{12}$$

$$R_9 = \frac{9,81\, \beta_w(t_w)(d_w - 2m_s)^3}{\left[\nu_w(t_w)\right]^2} . \tag{13}$$

Wielkości pomocnicze R_2, R_3, b zestawiono w tabeli 1, natomiast wielkości R_5, a, c w tabeli 2.

Wykorzystując równania (4), (5), (6), (7), po podstawieniu wielkości pomocniczych oraz odpowiednich przekształceniach uzyskano następującą postać układu równań (2):

$$\begin{aligned} &AG - B(\vartheta_w - \vartheta_o) = 0 , \\ &AG\left[Pr_o(\vartheta_o)\right]^{0,25} - C(\vartheta_o - t_o)^{b+1} = 0 , \\ &AG^{1-a}\left[Pr_w(\vartheta_w)\right]^{0,25} - D(t_w - \vartheta_w)^{c+1} = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Tabela 1

Wielkość pomocnicza	U = 0	U = 1	
		$R_3R_4(\vartheta_o - t_o)Pr_o(t_o) \leq 10^9$	$R_3R_4(\vartheta_o - t_o)Pr_o(t_o) > 10^9$
R_2	0,51	0,76	0,15
R_3	$(d_z + 2g_1 + 2g_p)^3$	L^3	L^3
b	0,25	0,25	0,33

Tabela 2

Wielkość pomocnicza	$R_1G < 2200$	$2200 \leq R_1G \leq 10^4$	$R_1G > 10^4$
R_5	0,17	$A_s(Re_w)$	0,021
a	0,33	0	0,8
c	0,1	0	0

Układ równań (14) rozwiązać można za pomocą dostępnych metod numerycznych [2,4]. Autorzy uznali za najdogodniejsze do zastosowania: metodę iteracji oraz metodę Newtona [1,5].

Stosując metodę iteracji, należy w pierwszej kolejności tak przekształcić wzajemnie równania wchodzące w skład układu, aby uzyskać uwikłaną postać zależności każdej niewiadomej względem pozostałych. Po odpowiednich przekształceniach układu równań (14) uzyskuje się:

$$\vartheta_o = t_o + \left(\frac{AG\left[Pr_o(\vartheta_o)\right]^{0,25}}{C}\right)^{\frac{1}{b+1}}, \tag{15}$$

$$\vartheta_w = t_w - \left(\frac{AG^{1-a}\left[Pr_w(\vartheta_w)\right]^{0,25}}{D}\right)^{\frac{1}{c+1}}, \tag{16}$$

$$G = \frac{B(\vartheta_w - \vartheta_o)}{A}. \tag{17}$$

Podstawiając do prawej strony każdego z równań (15), (16), (17) w miejsce ϑ_o, ϑ_w, G wartości pierwszych przybliżeń $\vartheta_{o(1)}$, $\vartheta_{w(1)}$, $G_{(1)}$, otrzymuje się drugie przybliżenie pierwiastków równań (14). Podobnie postępując w przypadku trzeciego i dalszych przybliżeń, uogólniając można n-te przybliżenie określić jako:

$$\vartheta_{o(n)} = t_o + \left(\frac{AG_{(n-1)}\left[Pr_o(\vartheta_{o(n-1)})\right]^{0,25}}{C}\right)^{\frac{1}{b+1}}, \tag{18}$$

$$\vartheta_{w(n)} = t_w - \left(\frac{AG^{1-a}_{(n-1)}\left[Pr_w(\vartheta_{w(n-1)})\right]^{0,25}}{D}\right)^{\frac{1}{c+1}}, \tag{19}$$

$$G_{(n)} = \frac{B(\vartheta_{w(n-1)} - \vartheta_{o(n-1)})}{A}. \tag{20}$$

Ponieważ prawe strony równań (15), (16) i (17) są funkcjami ciągłymi, w przypadku jednoczesnej zbieżności uzyskanych ciągów $\{\vartheta_{o(n)}\}$, $\{\vartheta_{w(n)}\}$, $\{G_{(n)}\}$, pierwiastkami równań są granice tych ciągów, tj.

$$\lim_{n\to\infty} \vartheta_{o(n)} = \bar{\vartheta}_o , \quad \lim_{n\to\infty} \vartheta_{w(n)} = \bar{\vartheta}_w , \quad \lim_{n\to\infty} G_{(n)} = \bar{G} ,$$

W celu zrealizowania przedstawionego sposobu obliczeń numerycznych metodą iteracji opracowano program APC-1.

Stosując metodę Newtona, należy, zakładając znajomość pierwszego przybliżenia pierwiastków $\vartheta_{o(1)}$, $\vartheta_{w(1)}$, $G_{(1)}$, określić wartość odpowiednich poprawek $\delta\vartheta_o$, $\delta\vartheta_w$, δG. Powtarzając kolejne przybliżenia, oparte na wartościach poprzednich, uzyskuje się poszczególne pierwiastki w postaci:

$$\vartheta_{o(n)} = \vartheta_{o(n-1)} + \delta\vartheta_{o(n)} , \tag{21}$$

$$\vartheta_{w(n)} = \vartheta_{w(n-1)} + \delta\vartheta_{w(n)} , \tag{22}$$

$$G_{(n)} = G_{(n-1)} + \delta G_{(n)} . \tag{23}$$

Po uwzględnieniu pierwiastków w powyższej postaci układ równań (14) przyjmie postać:

$$\begin{aligned} &A(G_{(n-1)} + \delta G_{(n)}) - B[(\vartheta_{w(n-1)}) + \delta\vartheta_{w(n)}) - \\ &\quad - (\vartheta_{o(n-1)} + \delta\vartheta_{o(n)})] = 0 , \\ &A(G_{(n-1)} + \delta G_{(n)})[Pr_o(\vartheta_{o(n-1)} + \delta\vartheta_{o(n)})]^{0,25} + \\ &\quad - C[(\vartheta_{o(n-1)} + \delta\vartheta_{o(n)}) - t_o]^{b+1} = 0 , \end{aligned} \tag{24}$$

$$A(G_{(n-1)} + \delta G_{(n)})^{1-a}[Pr_w(\vartheta_{w(n-1)} + \delta\vartheta_{w(n)})]^{0,25} +$$

$$- D[t_w - (\vartheta_{w(n-1)} + \delta\vartheta_{w(n)})]^{c+1} = 0 . \qquad (24)$$

W celu rozwiązania powyższego układu równań względem poprawek $\delta\vartheta_{o(n)}$, $\delta\vartheta_{w(n)}$, $\delta G_{(n)}$ należy każde z nich przedstawić w postaci zlinearyzowanej.

Rozwijając lewe strony każdego z równań układu (24) w szereg Taylora według potęg poprawek, otrzymuje się:

$$AG_{(n-1)} - B(\vartheta_{w(n-1)} - \vartheta_{o(n-1)}) + A\delta G_{(n)} + B\delta\vartheta_{o(n)} -$$

$$- B\delta\vartheta_{w(n)} + \tau_1(\delta G_{(n)}, \delta\vartheta_{o(n)}, \delta\vartheta_{w(n)}) = 0 ,$$

$$AG_{(n-1)}[Pr_o(\vartheta_{o(n-1)})]^{0,25} - C(\vartheta_{o(n-1)} - t_o)^{b+1} +$$

$$+ A[Pr_o(\vartheta_{o(n-1)})]^{0,25}\delta G_{(n)} +$$

$$+\left[AG_{(n-1)}\left(\frac{\partial[Pr_o(\vartheta_o)]^{0,25}}{\partial\vartheta_o}\right)_{\vartheta_{o(n-1)}} + C(b+1)(\vartheta_{o(n-1)} -\right.$$

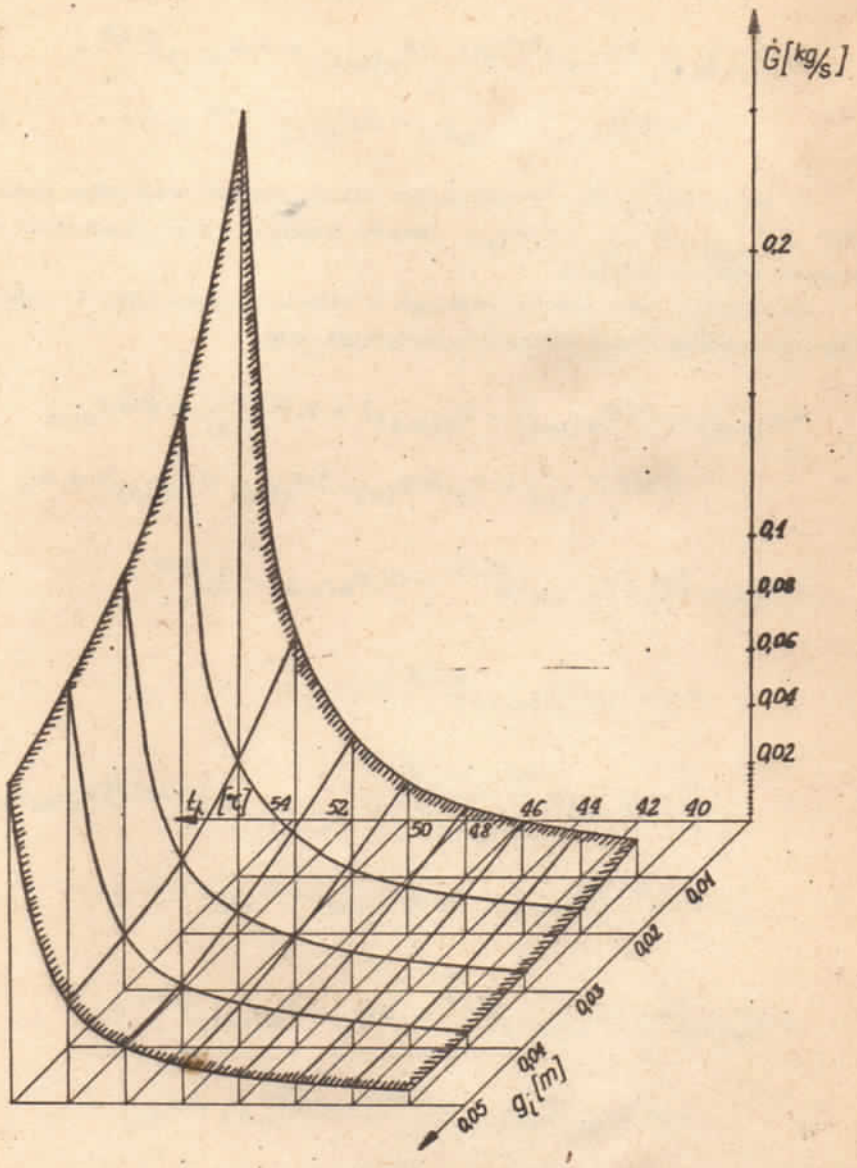
$$\left. - t_o)^b\right]\delta\vartheta_{o(n)} + \tau_2(\delta\vartheta_{o(n)}, \delta G_{(n)}) = 0 ,$$

$$AG^{1-a}_{(n-1)}[Pr_w(\vartheta_{w(n-1)})]^{0,25} - D(t_w - \vartheta_{w(n-1)})^{c+1} +$$

$$+ A[Pr_w(\vartheta_{w(n-1)})]^{0,25}(1-a)G^{-a}_{(n-1)}\delta G_{(n)} +$$

$$+\left[AG^{1-a}_{(n-1)}\left(\frac{\partial[Pr_w(\vartheta_w)]^{0,25}}{\partial\vartheta_w}\right)_{\vartheta_{w(n-1)}} + D(c+1)(t_w -\right.$$

$$\left. -\vartheta_{w(n-1)})^c\right]\delta\vartheta_{w(n)} + \tau_3(\delta G_{(n)}, \delta\vartheta_{w(n)}) = 0. \qquad (25)$$



Rys. 1. Zależność przepływu cyrkulacyjnego od temperatury końcowej t_K oraz od grubości izolacji g_i: $L = 100$ m, $t_o = 25^oC$, $m_s = 0$, $t_p = 55^oC$, $\lambda_i = 0{,}0326$ W/mK, $g_p = 0{,}005$ m, $\lambda_p = 0{,}65$ W/mK, $\lambda_R = 50{,}3$ W/mK, $d_z = 0{,}0483$ m, $d_w = 0{,}0418$ m

W powyższych równaniach wyrażenia τ_1, τ_2, τ_3 zawierają składniki będące nieskończenie małymi wyższego rzędu niż $\delta G_{(n)}$, $\delta \vartheta_{o(n)}$, $\delta \vartheta_{w(n)}$. Po pominięciu wyrażeń τ_1, τ_2, τ_3 otrzymuje się zamiast układu równań nieliniowych (24) układ równań liniowych względem szukanych poprawek.

Układ równań (25) rozwiązano metodą eliminacji Gaussa [2,3,4], a obliczenia kolejnych poprawek wykonano za pomocą podprogramu NURP *).

Powtarzając kolejne przybliżenia według równań (21), (22), (23), uzyskuje się rozwiązanie pierwiastków układu równań (14). W celu zrealizowania przedstawionego sposobu postępowania obliczeń numerycznych metodą Newtona, opracowano program APC-2 **).

W obu programach (APC-1, APC-2) przyjęte pierwsze przybliżenia wynoszą:

$$G_{(1)} = 0{,}0001, \quad \vartheta_{o(1)} = t_o + 1, \quad \vartheta_{w(1)} = t_w - 1.$$

W każdym z programów obliczenia kończono, gdy były spełnione jednocześnie następujące warunki:

$$\left|G_{(n)} - G_{(n-1)}\right| < \varepsilon_1 ;$$
$$\left|\vartheta_{o(n)} - \vartheta_{o(n-1)}\right| < \varepsilon_2 ,$$
$$\left|\vartheta_{w(n)} - \vartheta_{w(n-1)}\right| < \varepsilon_3 ,$$

gdzie

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ - założone dokładności przybliżeń poszczególnych pierwiastków.

Przedstawione sposoby obliczeń pozwalają na rozwiązanie równań bilansowych (2), opisujących wymianę ciepła w dowolnie wybranym odcinku instalacji cyrkulacyjnej. Rozwiązanie to umożliwia dokonanie analiz przepływów cyrkulacyjnych $\dot{G}$ z uwzględnieniem wpływu dowolnie

*) Autorem podprogramu NURP jest W.Król.

**) Programy APC-1 oraz APC-2 zostały opracowane na EMC Odra 1305 i są w posiadaniu autorów.

wybranych parametrów fizycznych ciał biorących udział w wymianie ciepła, np. λ_m, λ_R, λ_p, λ_i, λg_p, g_i, L itp.

Przykładowe rozwiązanie przepływu cyrkulacyjnego $\dot{G}$ w zależności od temperatury końcowej t_K oraz grubości izolacji g_i przedstawiono na rysunku 1.

LITERATURA

1. Guter R.S., Owczyński B.K.: Wstęp do metod numerycznych. PWN, Warszawa 1965.
2. Forsythe G.E., Moler C.B.: Computer solution of linear algebraic systems. Prentice - Hall, Inc. Englewood Cliffs, New York 1967.
3. Demidowicz B.P., Maron I.A.: Osnowy wyczislitelnoj matematiki. GIFML, Moskwa 1963.
4. Ralston A.: Wstęp do analizy numerycznej. PWN, Warszawa 1975.
5. Dryja M., Jankowscy J.M: Przegląd metod i algorytmów numerycznych. Cz. 2, WNT, Warszawa 1982.
6. Siudak M., Nosowski W.: Schematy blokowe algorytmów. Wyd. Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1974.
7. Strzałkowski A., Ślizyński A.: Matematyczne metody opracowywania wyników pomiarów. PWN, Warszawa 1978.

A NUMERICAL SOLUTION OF THE THERMAL BALANCE EQUATION OF A SECTION OF A HOT WATER SUPPLY INSTALLATION

Summary

The heat exchange in a single sectiom of a hot water supply installation is described by a system of thermal balance equations. The non-linearity and complicated form of these equations require the application of numerical methods for their solution. The iteration and Newton methods of calculating these equations are presented. By means of the solutions obtained it is possible to analyse the circulationg flow with respect to optionally chosen parameters of bodies taking part in the heat exchange.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕРМИЧЕСКОГО БАЛАНСА, УЧАСТКА ПРОВОДКИ ТЁПЛОЙ ХОЗЯЙСТВЕННОЙ ВОДЫ

Р е з ю м е

Тёплообмен в отдельном участке проводки тёплой хозяйственной воды, описывает схема балансных уравнений. Нелинейность и сложный вид этих уравнений требует применения численных методов их решения. Представлены способы вычисления методом итерации и методом Ньютона. Получённые результаты разрешают провести анализ циркулятивных течений при учёте довольно избранных параметров физических тел, принимающих участие в теплообмене.